Rezolvare Test 45 (M_tehnologic)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$; $2^{\log_2 1} = 1$;$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \Rightarrow$
   $\sqrt[3]{64} + 2^{\log_2 1} + \log_3 \frac{1}{9} = 4 + 1 - 2 = 3 \in \mathbb{N}$.
2. x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2018x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{-2018}{1} = 2018$ şi $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{1} = 1$ (relaţiile lui Viete). $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2018}{1} = 2018$.
3. Avem condiţia de existenţă: $x > 0 \Rightarrow x \in (0; \infty)$. Notăm $lnx = y$
   $\Rightarrow ln^2x - 2lnx - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 3 \Rightarrow$
   $lnx = -1 \Rightarrow x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \in (0; \infty)$, $lnx = 3 \Rightarrow x_1 = e^3 \in (0; \infty) \Rightarrow S = \{\frac{1}{e}; e^3\}$.
4. $x = preţul\ iniţial\ al\ produsului \Rightarrow x - \frac{30}{100} \cdot x = 1412{,}6 \Rightarrow \frac{70}{100} \cdot x = 1412{,}6 \Rightarrow$
   $x = \frac{1412{,}6 \cdot 100}{70} \Rightarrow x = 2018\ lei$.
5. B mijlocul segmentului $AC, x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 6 = \frac{-2+x_C}{2} \Rightarrow x_C - 2 = 12 \Rightarrow x_C = 14$,
   $y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-5+y_C}{2} \Rightarrow y_C - 5 = 2 \Rightarrow y_C = 7 \Rightarrow C(14, 7)$.
6. Din teorema sinusului avem $\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{2R} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) Fie propoziţia $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, demonstrăm prin inducţie matematică:

Verificare $P(2)$: $A^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adevărat conform punctului a).

Presupunem $P(k)$ adevărat, adică $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, şi demonstrăm $P(k+1)$,

adică $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1)$ adevărat $\forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

$pentru$ că $ambele\ etape\ sunt\ verificate \Rightarrow P(n)$ adevărat $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow$

$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

c) $B = A + A^2 + \cdots + A^{2018} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 3^{2018} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018} & 0 \\ 0 & \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{de\ 2018\ ori} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{3^{2018}-1}{3-1} & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1) & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$

$B^t = B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1) & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$.

(pentru suma $3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018} = 3 \cdot \frac{3^{2018}-1}{3-1} = \frac{3}{2} \cdot (3^{2018} - 1)$ am folosit formula

$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ de la progresia geometrică)

2. a) $" \Rightarrow " x * y = xy - 5(x+y) + 30 = xy - 5x - 5y + 30 = x(y-5) - 5(y-5) +$
$+5 = (y-5)(x-5) + 5 = (x-5)(y-5) + 5$

$" \Leftarrow " \ (x-5)(y-5) + 5 = xy - 5x - 5y + 30 = xy - 5(x+y) + 30 = x * y$

b) $x * x = (x-5)(x-5) + 5 = (x-5)^2 + 5$

$x * x * x = (x * x) * x = [(x-5)^2 + 5] * x = [(x-5)^2 + 5 - 5](x-5) + 5 =$
$= (x-5)^3 + 5 \Rightarrow x * x * x = x \Leftrightarrow (x-5)^3 + 5 = x$
$\Leftrightarrow (x-5)^3 - (x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)[(x-5)^2 - 1] = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)(x-5-1)(x-5+1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-5)(x-6) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6 \Rightarrow S = \{4; 5; 6\}$

c) $x * 5 = (x-5)(5-5) + 5 \Rightarrow x * 5 = 5, \forall x \in \mathbb{R}$ (1);

$5 * y = (5-5)(y-5) + 5 \Rightarrow 5 * y = 5, \forall y \in \mathbb{R}$ (2);
Legea *este asociativă (3). Folosind (1), (2) şi (3) $\Rightarrow$
$1 * 2 * 3 * \ldots * 2018 = \underbrace{(1 * 2 * 3 * 4)}_{x} * 5 * \underbrace{(6 * 7 * \ldots * 2018)}_{y} = x * 5 * y =$
$(x * 5) * y = 5 * y = 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right)' = \frac{(ln2x)' \cdot x - x' \cdot ln2x}{x^2} = \frac{1 - ln2x}{x^2}$;

$f'\left(\frac{e^2}{2}\right) = \frac{1 - \ln(2 \cdot \frac{e^2}{2})}{(\frac{e^2}{2})^2} = \frac{1-2}{(\frac{e^2}{2})^2} = \frac{-1}{\frac{e^4}{4}} = -\frac{4}{e^4}$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ln2x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$ deci $\frac{e}{2}$ este punct de maxim$\Rightarrow f\left(\frac{e}{2}\right)$ este valoarea maximă a funcţiei f
$\Rightarrow f\left(\frac{e}{2}\right) \geq f(x), \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{2}{e} \geq f(x), \forall x \in (0, \infty)$

2) a) Pe $(-\infty; 0)$ f este continuă (funcţie elementară exponenţială), pe $(0; \infty)$ f este continuă (funcţie elementară polinomială). Studiem continuitatea în 0:

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^x = e^0 = 1, f(0) = e^0 = 1; l_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1-x) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$

$l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow$ f este continuă în 0$\Rightarrow$ f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ f admite primitive.

b) Fie F o primitivă a funcţiei f pe $(-\infty; 0) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (-\infty; 0)$
$\Rightarrow F''(x) = f'(x), \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow F''(x) = f'(x) = (e^x)' = e^x > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow$ F este convexă pe $(-\infty; 0)$

c) $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} e^x dx + \int_{0}^{2} (1-x)dx = e^x \Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{0}^{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} =$
$e^0 - e^{-1} + 2 - 0 - \frac{2^2}{2} + \frac{0^2}{2} = 1 - \frac{1}{e} + 2 - 2 = \frac{e-1}{e}.$