Rezolvare Test 1 (M_mate-info)

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1) $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1+x}{3} = 0 \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$

$$f(-3) \cdot f(-2) \cdot \ldots \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$$

2) Avem condiţia de existenţă : $2x - 3955 > 0 \Rightarrow 2x > 3955 \Rightarrow x > 1977{,}5 \Rightarrow$

$x \in (1977{,}5; \infty)$. Din $\log_3(2x - 3955) = 4 \Rightarrow 2x - 3955 = 3^4 \Rightarrow 2x = 81 + 3955 \Rightarrow$

$2x = 4036 \Rightarrow x = 2018 \in (1977{,}5; \infty) \Rightarrow S = \{2018\}$.

3) $x^2 - x - 10 < 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$. Ecuaţia $x^2 - x - 12 = 0$ are soluţiile

$x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Din tabelul de semne obţinem $\in (-3; 4)$, cum
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow S = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

4) Cuburi perfecte mai mici decât 100 sunt: $1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64$. Deci din

mulţimea$M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \ldots, \sqrt[3]{100}\}$numere raţionale sunt $\sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{27} = 3, \sqrt[3]{64} = 4$ (deci 4 numere raţionale) ⇒ cazuri favorabile vor fi 100 - 4=96 (numere iraţionale) .

$$probabilitatea = \frac{număr\ cazuri\ favorabile}{număr\ cazuri\ posibile} = \frac{96}{100} = 0{,}96\ sau\ 96\%\ .$$

5) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

6) Din teorema cosinusului $\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \frac{3+6-2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1) a)$\det(M(x)) = \begin{vmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot x = x$ (ceilalţi termeni ai dezvoltării sunt toţi nuli)

b) $M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & lgy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & lgx + lgy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & lgxy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = M(xy), \forall\, x, y > 0.$

c) $M(1) + M(2) + \cdots + M(2018) = \begin{pmatrix} 1 & lg1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & lg2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \cdots +$

$\begin{pmatrix} 1 & lg2018 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1+1+\cdots+1}_{de\ 2018\ ori} & lg1+lg2+\cdots+lg2018 & 0 \\ 0 & \underbrace{1+1+\cdots+1}_{de\ 2018\ ori} & 0 \\ 0 & 0 & 1+2+\cdots+2018 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2018 & \lg(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2018) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018\cdot 2019}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & \lg(2018!) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018\cdot 2019}{2} \end{pmatrix}.$$

2) a) Mulţimea elementelor inversabile este: $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\}$ (un element $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_{12} \Leftrightarrow (a, 12) = 1$)$\Rightarrow \hat{1}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7}\cdot\widehat{11} = \hat{1}$.

b) $\hat{4}x + \hat{2} = \hat{6}, x \in \mathbb{Z}_{12} \Leftrightarrow \hat{4}x + \hat{2} + \widehat{10} = \hat{6} + \widehat{10} \Leftrightarrow \hat{4}x = \hat{4} \Rightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{4}, \hat{7}, \widehat{10}\}$.

c) $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$. Pentru a reduce necunoscuta y înmulţim prima ecuaţie cu $-\hat{3} = \widehat{12-3} = \hat{9}$ în $\mathbb{Z}_{12}\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{9}x + \hat{9}y = \hat{6} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$ adunând cele două ecuaţii obţinem $\widehat{11}x = \widehat{11} \Rightarrow$

$x \in \{\hat{1}\}$. Pentru $x = \hat{1}$ prima ecuaţie din sistem devine $\hat{1} + y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{1}$ (1)

Pentru $x = \hat{1}$ a doua ecuaţie din sistem devine $\hat{2} + \hat{3}y = \hat{5} \Rightarrow \hat{3}y = \hat{3} \Rightarrow y \in \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ soluţia sistemului este $S = \{(\hat{1}, \hat{1})\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1) a) f este continuă în $x_0 = 0 \Leftrightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0)$.

$l_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}}(2^x + 2017) = 2018$; $l_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}}(x^2 + a) = a$;

$$f(0) = a \Rightarrow a = 2018$$

c) Pentru $x > 0 \Rightarrow f'(x) = (x^2 + a)' = 2x \Rightarrow f"(x) = (2x)' = 2 > 0, \forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

f' este crescătoare pe $(0; \infty), \forall a \in \mathbb{R}$

c) $\lim_{x\to-\infty}((f(x) - 2017)\cdot x) = \lim_{x\to-\infty}(2^x \cdot x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2^{-x}} = 0$.

2) a)$\int f^2(x)dx = \int \sqrt{x+2}^2 dx = \int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$.

b) $A = \int_0^1 |f(x)|dx$. Cum $f(x) = \sqrt{x+2} > 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ pentru

$x \in [0,1] \Rightarrow A = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x+2}\,dx = \int_0^1 (x+2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^1 =$
$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\,\Big|_0^1 = \frac{6\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{3}$.

c) Deoarece $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$, $\forall\, x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{3}$, $\forall\, x \in [0,1] \Rightarrow$

$$x^{2017} f(x) \leq x^{2017}\sqrt{3}\,,\ \forall\, x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 x^{2017} f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2017}\sqrt{3}dx = \sqrt{3}\int_0^1 x^{2017}dx$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{x^{2018}}{2018}\Big|_0^1 = \sqrt{3}\ \cdot \left(\frac{1^{2018}}{2018} - \frac{0^{2018}}{2018}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2018} \Rightarrow \int_0^1 x^{2017} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2018}$$