# Rezolvare Test 24 (M_șt-nat)

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Şirul este o progresie aritmetică $(a_n)_n$ cu primul termen $a_1 = 1$ şi raţia
$$r = a_{n+1} - a_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r = 6 - 1 = 11 - 6 = 16 - 11 = \cdots = 5$$
$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow \; a_{13} = a_1 + 12r = 1 + 12 \cdot 5 = 61$$
2. Mulțimea are $99 - 9 = 90$ elemente (90 cazuri posibile). Dintre acestea, divizibile cu 5 sunt numerele care au ultima cifră 0 sau 5, adică $\{10,15, \dots ,95\}$ (sau $5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots$,

$5 \cdot 19$, de la 2 la 19 sunt 18 numere), deci 18 cazuri favorabile. $probabilitatea = \frac{număr\ cazuri\ favorabile}{număr\ cazuri\ posibile} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}\ sau\ 0{,}2\ sau\ 20\%$.

3. Condiţii de existenţă: $5x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{6}{5} \Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty)$ şi $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0; \infty)$ (această condiţie apare din faptul că membrul stâng e pozitiv, deci şi membrul drept trebuie să fie pozitiv) $\Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty) \cap \; [0; \infty) \Rightarrow x \in [\frac{6}{5}; \infty)$. Ridicând la pătrat ecuaţia devine : $5x - 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$, cu soluţiile $x_1 = 2 \in [\frac{6}{5}; \infty)$ , $x_2 = 3 \in [\frac{6}{5}; \infty)$
$$\Rightarrow S = \{2; 3\}$$
4. $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \,; f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5; f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \dots \dots \dots \dots$
$$f(10) = 3 \cdot 10 - 1 = 29 \Rightarrow$$
$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) = 2 + 5 + 8 + \cdots + 29 = \frac{(2 + 29)10}{2} = 31 \cdot 5 =$$
$$= 155$$
5. Ecuaţia derptei ce trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este:
$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$AB : 2x + 3y - 0 - 6 + y - 0 = 0 \Rightarrow AB : 2x + 4y - 6 = 0 \Rightarrow$$
$$AB : x + 2y - 3 = 0.$$
6. $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin 45°}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3}{2}$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$ (din relaţiile lui Viete)

sau $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 2 + (-2) = 0$ .

b) Orice soluţie verifică ecuaţia din care provine

$\Rightarrow \; x_1^3 - 4x_1 = 0 \,; \; x_2^3 - 4x_2 = 0; \; x_3^3 - 4x_3 = 0$ . Adunând cele trei relaţii obţinem:

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4(x_1 + x_2 + x_3) = 0$. Folosind punctual a)$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

c) $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_2 & x_2 & x_3 \\ x_1 + x_2 + x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$ (conform punctului a)).

2) a) "$\Rightarrow$"$x \circ y = xy - 3(x + y) + 12 = xy - 3x - 3y + 12 = x(y - 3) - 3y + 9 + 3 = x(y - 3) - 3(y - 3) + 3 = (y - 3)(x - 3) + 3 = (x - 3)(y - 3) + 3$

"$\Leftarrow$" $(x - 3)(y - 3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3 = xy - 3(x + y) + 12 = x \circ y$

b) $x \circ 3 = (x - 3)(3 - 3) + 3 = (x - 3) \cdot 0 + 3 = 3\ , \forall x \in \mathbb{R}$ (am folosit punctul a))

c) $3 \circ y = (3 - 3)(y - 3) + 3 = 0 \cdot (y - 3) + 3 = 3\ , \forall y \in \mathbb{R}$. Ştiind că legea de compoziţie " $\circ$ " este asociativă şi folosind $x \circ 3 = 3\ , \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ 3 \circ y = 3\ , \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$E = (-2018) \circ (-2017) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2018 =$
$\underbrace{= (-2018) \circ (-2017) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2}_{x} \circ 3 \circ \underbrace{4 \circ 5 \circ \ldots \circ 2018}_{y} = (x \circ 3) \circ y = 3 \circ y = 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

1. a) $f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia $x = -1, f(-1) = -\frac{1}{e}$. Deoarece pentru $x < -1, f'(x) < 0$, iar dacă $x > -1$, $f'(x) > 0$, punctul de coordonate $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ este punct de minim.

   b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$.

   c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{xe^x - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x(e^x - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x - 1}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$.

2) a) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f $\Rightarrow F'(x) = f(x) = x^2 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(x^2 + e^x)dx = \int_0^1 x^3dx + \int_0^1 xe^xdx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + e^x(x - 1)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

$$\int_0^1 xe^xdx = \int_0^1 x(e^x)'dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 x' \cdot e^xdx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^xdx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1$$
$$= e^x(x - 1)\Big|_0^1 = e(1 - 1) - e^0(0 - 1) = 1$$

c) Efectuând schimbarea de variabilă $= \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ . Pentru $x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$, pentru $x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$ . Din teorema de schimbare de variabilă deducem că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ $= \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 + e^t)dt = (\frac{t^3}{3} + e^t)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} + e\right) - \left(\frac{0}{3} + e^0\right) = \frac{1}{3} + e - 1 = \frac{3e-2}{3}$ .